Ueber

Fusspunkten-Curven

auf der Oberfläche

eines

geraden Kreiskegels.

Mit einer Figurentafel.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

in Rostock

von

Ad. Stehle

aus Sigmaringen.

Ingenieur und erster Lehrer an der höheren Fachschule der Stadt Einbeck.

Göttingen.

Druck der Gebrüder Hofer.

1873.

Dem

Gründer und Direktor

der

höheren Fachschule der Stadt Einbeck

Herrn Dr. E. Kirchner

aus

Hochschätzung und Anhänglichkeit

gewidmet

vom

Verfasser.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553624_0189

Einleitung.

Eine Fusspunkten-Curve ist der Ort der Fusspunkte aller Lothe, welche sich von einem gewissen Punkte aus auf ein sich nach einem bestimmten Gesetze bewegendes Element (Linie oder Ebene) in jeder seiner Lage fällen lassen; oder: Eine Fusspunkten-Curve ist der Ort des Scheitels eines rechten Winkels, dessen einer Schenkel stets durch ein und denselben Punkt geht, während der andere sich nach einem bestimmten Gesetze bewegt. Diese letztere Definition giebt uns zugleich ein Bild von der Entstehungsweise einer solchen Curve und ist für die kinematische Behandlung derselben, bei der Geschwindigkeits- und Zeitverhältnisse in der Bewegung zur Sprache kommen, wesentlich.

Aus der Eigenschaft nun, wonach sämmtliche Curvenpunkte Scheitel rechter Winkel sind, ergiebt sich leicht eine Construction derselben; ferner folgen aus ihr zuweilen ohne Weiteres Beziehungen, deren Kenntniss sowohl zur Darstellung der Curve, als zur analytischen Behandlung derselben von nicht geringem Werthe sind. So besteht für Fusspunkten-Curven auf Kegelflächen das charakteristische Merkmal, dass dieselben zugleich auf Kugeloberflächen liegen, deren

Durchmesser gleich der jedesmaligen Entfernung des Ausgangspunktes der Lothe (welcher in der Folge „Pol“ genannt und mit dem Buchstaben P bezeichnet werden möge) von dem Kegelscheitel ist. Sämmtliche Curvenpunkte sind also auch ein Ort gleicher Entfernung von einem gewissen Punkte, dem Halbierpunkte der Verbindegeraden des Poles und Kegelscheitels, und lassen sich als Durchdringungspunkte einer Kugel- mit einer Kegel-Fläche bei zweckmässiger Wahl der Projections-Ebenen leicht construiren.

Discussion der Fusspunkten-Curven auf der Oberfläche eines geraden Kreiskegels.

Es bewege sich ein rechter Winkel MQN im Raume so, dass der eine Schenkel QM desselben stets durch den festen Punkt P, und der Schenkel QN durch einen zweiten festen Punkt O gehe; ausserdem gleite der Letztere auf der Peripherie eines Kreises, dessen Ebene normal sei zu der Verbindegeraden des Punktes O und des Kreismittelpunktes. Die Bahn, welche so von dem Scheitel Q des rechten Winkels beschrieben wird, ist eine Fusspunkten-Curve auf der Fläche eines geraden Kegels mit kreisförmiger Basis, und zwar ist der Punkt O der Scheitel dieses Kegels, und der Punkt P der Pol zur genannten Curve.

Das (rechtwinklige) Coordinatensystem möge so angenommen werden, dass sein Ursprung mit dem Scheitel O des Kegels, und die Z-Achse des Systems mit der Kegelachse zusammenfalle; dass ferner die XZ-Ebene durch den Pol P gehe.

Es sei φ der Winkel, welchen eine Kegelseite mit der Achse bilde, und demgemäss:

$$x^2+y^2-\tan g^2\varphi z^2=0$$

die Gleichung des Kegels. Eine Ebene, durch die z-Achse gelegt, welche mit der positiven Richtung der xz-Ebene (in der auch der Pol P liege) den Winkel ξ einschliesse, und deren Gleichung also: $y=\tan g\xi . x$ ist, wird die Kegelfläche in zwei Seiten schneiden. Bezeichnen wir nun mit α, β und γ die Winkel, welche eine der Letzteren mit den bezüglichen Achsen bildet, so ist:

$$\cos\alpha=\sin\varphi.\cos\xi;\ \cos\beta=\sin\varphi.\sin\xi;\ \cos\gamma=\cos\varphi.$$

wobei ξ von 0^0 bis 360^0 zu zählen ist.

Sind nun die bezüglichen Coordinaten des Poles P: $x,=a, (y,=0)$ und $z,=c$, so gilt die Gleichung:

$$PQ^2=c^2\cos^2\beta+(c.\cos\alpha-a\cos\gamma)^2+a\cos^2\beta,$$

woraus sofort:

$$OQ=a\sin\varphi.\cos\xi+c.\cos\varphi$$

oder, da $OQ=\frac{z}{\cos\varphi}$ ist, die Gleichung:

$$z=a\sin\varphi.\cos\varphi.\cos\xi+c.\cos^2\varphi$$

folgt, so dass also, wenn wir an Stelle von $\cos\xi$ dessen Werth, durch die Coordinaten x und y ausgedrückt, einführen, die beiden Gleichungen

$$z=a\sin\varphi.\cos\varphi\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+c.\cos^2\varphi$$

und $x^2+y^2-\tan g^2\varphi.z^2=0$

die in Rede stehende Fusspunkten-Curve darstellen.

Die symmetrische Gestalt unserer Curve in Bezug auf die xz-Ebene kann leicht aus diesen Gleichungen nachgewiesen werden, ergiebt sich übrigens auch sofort aus der Anschauung und der Construction einzelner Punkte derselben. Ausserdem erfahren wir, na-

mentlich aus der ersten der Gleichungen, noch folgende allgemeine Eigenschaften:

Setzt man nämlich $y=o$ (entsprechend den Werthen: $\xi=0^0$ und $\xi=180^0$), so wird:

$$z=c\cos^2\varphi \pm a\sin\varphi.\cos\varphi$$

während, wenn $\xi=90^0$ gesetzt wird

$$z=c\cos^2\varphi$$

folgt. Die Curve ist also bei $\xi=0^0$ und $\xi=180^0$ im Maximum resp. Minimum ihrer Ordinate z, verläuft also an diesen Stellen parallel der xy-Ebene; ferner hat bei $\xi=90^0$ die Ordinate z einen von a unabhängigen Werth, welcher also für alle Fusspunkten-Curven derselbe ist, wenn nur ihre Pole P auf einer Geraden $z=c$ liegen. Endlich enthält noch die obige Gleichung:

$$z=c\cos^2\varphi \pm a\sin\varphi\cos\varphi$$

die Bedingung, unter welcher wir nur positive oder nur negative, endlich positive und negative Werthe für z erhalten. Ist nämlich $\frac{c}{a} > \text{tang.}\varphi$, so wird das Erstere stattfinden, während bei $\frac{c}{a} < \text{tang.}\varphi$ die Ordinate z positiv und negativ ausfallen kann, so dass alsdann die Curve zu beiden Seiten der xy-Ebene liegt. Diess bedingt ihren Durchgang durch den Kegelscheitel, für den das zugehörige ξ aus:

$$o=a\sin\varphi\cos\xi+c.\cos\varphi$$

oder aus

$$\cos\xi=-\frac{c}{a}\cot g\varphi$$

berechnet werden kann. Hat c einen positiven Werth, so liegen die beiden Werthe von ξ im 2ten und 3ten Quadranten, ist dagegen c negativ, so im 1ten und

4ten Quadranten. Die Curve geht also bei $\frac{c}{a} < \text{tang}\varphi$ zweimal durch den Anfungspunkt O, und hat an dieser Stelle demnach einen Doppelpunkt. Nehmen wir $\frac{c}{a} = \text{tang}\varphi$ an, so ergiebt sich aus der früheren Gleichung:

$$z = c\cos^2\varphi + a\sin\varphi.\cos\varphi\cos\xi$$

nur bei $\xi = 180^0$ der Werth: $z = o$, bei jedem andern Werthe von ξ dagegen ein positives z. Die Curve liegt also in ihrem ganzen Verlaufe auf ein und derselben Seite der xy-Ebene, und hat einen, in der Kegelscheitel fallenden Rückkehrpunkt. Für diese Fusspunkten-Curve erhalten wir als Ort des Poles P (gemäss der Bedingung: $\frac{c}{a} = \text{tang}\varphi$) eine Gerade, welche im Kegelscheitel auf einer Kegelseite senkrecht steht. Die die Curve darstellenden Gleichungen sind alsdann folgende:

$$z = a\sin\varphi\cos\varphi\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

und $x^2 + y^2 - \text{tang}^2\varphi.z^2 = o$

Da eine genauere Untersuchung der Curve für diese specielle Lage des Poles P im Wesentlichen mit derjenigen übereinstimmt, welche sogleich für die Annahme, dass P auf einer Geraden liege, die im Kegelscheitel auf der Kegelachse senkrecht steht, durchgeführt wird, so will ich zu ihrer Charakterisirung nur Folgendes über ihre Projectionen auf die xz- und xy-Ebene bemerken.

Die Gleichung der Projection der Curve auf die xz-Ebene lautet:

$$x = \frac{1}{a\cos^2\varphi} z^2 - \operatorname{tang}\varphi . z,$$

und stellt dieselbe eine Parabel dar, deren Achsenrichtung die der x-Achse, und deren Parameter: $p = \frac{1}{2} a\cos^2\varphi$ ist. Bezeichnen wir mit x_0 und z_0 die Coordinaten des Scheitels der Parabel, so ergiebt sich ohne Weiteres:

$$x_0 = -\frac{a\sin^2\varphi}{4}$$

$$z_0 = \frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{2}$$

Die Projection der Curve auf die xy-Ebene wird durch die Gleichung

$$(x^2+y^2 - a\sin^2\varphi . x)^2 = a^2\sin^4\varphi (x^2+y^2)$$

gegeben. Dieselbe ist also eine Pericycloide, deren Grundkreis den Radius $r = a\sin^2\varphi$, deren Erzeugungskreis den Radius $r, = 2r = 2a\sin^2\varphi$ hat. Man nennt diese Curve ihrer Gestalt wegen auch „Herz-Curve“ oder „Cardioide“.

Eine Untersuchung der Fusspunkten-Curve auf parallele Tangenten ergiebt das Resultat, dass nur Ein Paar solcher Tangenten vorhanden ist, und zwar entsprechend den Werthen $\xi = 60^0$ und $\xi = 300^0$.

Die Bedingung schliesslich, dass sämmtliche Ordinaten z der Punkte der Curve negativ ausfallen, die Curve also ganz auf der negativen Seite der xy-Ebene liege, ist die, dass einmal $\frac{c}{a} > \operatorname{tang}\varphi$ sei, und dass der Werth von c (bei positivem Werthe von a) negativ sei.

Eingehendere Behandlung der Fusspunkten-Curve für den speciellen Fall, dass der Pol P auf einer Geraden liegt, welche im Kegelscheitel auf der Kegelachse senkrecht steht.

Die Gleichung unserer Curve für diesen besonderen Fall erhalten wir sofort, wenn wir nur in der früher angegebenen Gleichung:

$$z = a\sin\varphi.\cos\varphi\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + c\cos^2\varphi$$

$c = o$ setzen; man erhält demnach:

$$z = a\sin\varphi\cos\varphi\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Diese Gleichung im Verein mit der Gleichung der Kegelfläche stellt die Curve dar.

Zunächst folgt, dass, weil hier $\frac{c}{a} = o$ ist, erstlich die Curve zu beiden Seiten der xy-Ebene liegt, ferner, dass wegen der Gleichung:

$$\cos\xi = -\frac{c}{a}\operatorname{cotg}\varphi$$

die dem Doppelpunkte (im Kegelscheitel) entsprechende Werthe von ξ die Winkel 90^0 und 270^0 sind. Da der Pol P in der xy-Ebene selbst sich befindet, so ist die Curve nicht blos symmetrisch zur xz-, sondern auch zur xy-Ebene, andererseits befindet sie sich in ihrem ganzen Verlaufe im Raumtheile der positiven x, wie sich sogleich aus deren Projection auf die xz-Ebene ergiebt. Bevor ich jedoch zur Aufstellung der Gleichungen der Projectionen übergehe, will ich über die einfache geometrische Construction der Ordinaten z Folgendes bemerken.

Da für $\xi = o$ die Ordinate $z = a \sin\varphi . \cos\varphi$ ist, so folgt das Verhältniss einer beliebigen Ordinate zu dieser: $x : \sqrt{x^2+y^2}$, und es gilt daher der

Satz. Um für irgend eine Seite des Kegels den auf ihr liegenden Curvenpunkt zu ermitteln, suche man zu der Ordinate, welche dem Werthe $\xi = 0^0$ entspricht, der Ordinate x und dem Abstande $\sqrt{x^2+y^2}$ eines beliebigen Punktes der betreffenden Kegelseite von der Kegelachse die vierte Proportionale.

Projectionen der Fusspunkten-Curve und einige aus diesen abgeleitete Eigenschaften derselben.

Die Elimination von y aus den Gleichungen der Fusspunkten-Curve liefert für deren Projection auf die xz-Ebene:

$$z^2 = a \cos^2\varphi . y$$

d, h. eine Gleichung einer Parabel mit dem Parameter: $p = \frac{1}{2} a \cos^2\varphi$. Da die z-Achse die Parabel im Scheitel (Coordinatenanfangspunkt) O tangirt, so folgt hieraus die bereits erwähnte Eigenschaft der Curve, dass sie ganz auf der einen Seite der yz-Ebene und zwar im Raumtheile der positiven x liege; denn die obige Gleichung liefert für negative x imaginäre Ordinaten: z.

Es ist oben erwähnt worden, dass auch für den Fall, wenn $\frac{c}{a} = \mathrm{tg}\varphi$ ist, d. h. wenn der Pol P auf einer zu einer Kegelseite im Kegelscheitel normal stehenden Geraden liegt, die Projection der Fusspunkten-Curve auf die xz-Ebene eine Parabel mit dem Parameter: $p = \frac{1}{2} a \cos^2\varphi$ sei. Es lässt sich nun aus der allgemei-

nen Oleichung der Fusspunkten-Curven leicht die ihnen allen zukommende Eigenschaft nachweisen, dass ihre Projectionen auf die genannte Ebene congruente Parabeln sind; wir können also folgenden allgemein gültigen Satz aussprechen:

Wenn sich die Fläche eines geraden parabolischen Cylinders und die eines geraden Kreiskegels rechtwinklig durchdringen, d. h. so, dass die Erzeugende der Cylinderfläche normal sei zur Richtung der Kegelachse, und ferner in der Weise, dass die Richtung der Parabelachse normal ist zur Kegelachse: so hat die Durchdringungscurve beider Flächen die Eigenschaft, dass sich die in den Curvenpunkten auf den entsprechenden Kegelseiten errichteten Normalen in Einem Punkte (dem Pole P der Curve) schneiden. Wird die Cylinderfläche parallel mit sich in der Richtung der Kegelachse verschoben, so bewegt sich dieser Punkt auf einer mit der Kegelachse parallel laufenden Geraden, und zwar ist die Entfernung beider Linien: $\frac{2p}{\cos^2\varphi}$, wenn p der Parameter der Leitlinie der Cylinderfläche, und φ der von einer Kegelseite und der Kegelachse eingeschlossene Winkel ist.

Fällt der Scheitel der Parabel mit dem Kegelscheitel zusammen, so liegt der Pol auf der Achse derselben, und die Durchdringungscurve stellt die, der in Rede stehenden speciellen Lage des Punktes P entsprechende, Fusspunkten-Curve dar. Diese kann ferner angesehen werden als Durchdringungscurve der Kegelfläche und der Fläche eines Kreiscylinders, dessen Mantel die Kegelachse als Seite enthält; denn durch Elimination der Ordinate z aus den Gleichungen unserer Curve erhalten wir für deren Projection

in der xy-Ebene die Scheitelgleichung eines Kreises vom Durchmesser $a\sin^2\varphi$.

Bevor ich zur Aufzählung einiger wichtiger Eigenschaften unserer Curve, die sich aus diesen beiden Projectionen herleiten lassen, übergehe, mag über die Projection derselben auf die yz-Ebene noch Folgendes bemerkt werden.

Die Gleichung derselben:

$$z^4 - a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi z^2 + a^2\cos^4\varphi y^2 = 0$$

stellt eine der Lemniskate ähnliche Linie dar. Da diese zugleich der Durchschnitt einer durch die Gesammtheit der vom Pole ausgehenden Normalen gelegten Ebene mit diesen (Normalen) ist, die zugleich auf der Achse des von Letzteren gebildeten Kegels senkrecht steht, so führt ihre Gleichung auf die Gleichung dieses zweiten Kegels, dessen Scheitel im Pole P liegt. Was die Richtung der Tangenten in dem (mit der Projection des Kegelscheitels zusammenfallenden) Doppelpunkte unserer Curve betrifft, so bilden diese mit der positiven Richtung der z-Achse die Winkel: φ und: $\pi - \varphi$, was sowohl aus dem Umstande, dass die fraglichen Tangenten mit den in die yz-Ebene fallenden Kegelseiten identisch sind, folgt, als auch aus der Gleichung:

$$\tan g^2\tau f''(y,y) + 2\tan g\tau f''(y,z) + f''(z,z) = 0,$$

welche über die Richtungswinkel der Tangenten in einem etwa vorhandenen Doppelpunkte einer Curve: f(y,z) Aufschluss giebt, hervorgeht.

Es ist nicht uninteressant eine Construction von Punkten eines Kreises und hieraus die Construction von Parabelpunkten aus den Resultaten, die sich hier für die Projectionen unserer Curve auf die xy- und xz-Ebene ergaben, abzuleiten. Dieselbe wird am ein-

fachsten, wenn man sich die Curve als Durchschnitt einer Kugel mit einem geraden Kreiskegel darstellt. Die Lage der Kugel gegen den Kegel muss so angenommen werden, dass jene von einer durch die Kegelachse gelegten Ebene im Kegelscheitel berührt wird. Mit Beibehaltung des Coordinatensystems (wobei wir jetzt die Coordinaten-Ebenen als Projections-Ebenen ansehen), ergeben sich unter Anwendung von Hülfs-Ebenen, parallel zur xy-Ebene die Punkte der Projection auf die Letztere als Durchschnitte je zweier Kreise, die sich ohne Weiteres auf die entsprechenden Schnitte jener Hülfs-Ebenen mit genannten Flächen, die sich in der xz-Ekene als gerade Linien zeigen, übertragen lassen und in ihrer continuirlichen Folge die Projection der Curve, eine Parabel in dieser letzteren Ebene ausmachen.

Da die Projectionen unserer Fusspunkten-Curven auf die xy-Ebene, und die xz-Ebene ein Kreis bezw. Parabel ist, so folgen hieraus zahlreiche Eigenschaften der Curve selbst, von denen an dieser Stelle einige hervorgehoben werden mögen.

Wenn man irgend einen Punkt der Curve der Reihe nach mit andern Punkten derselben verbindet, und sodann durch diese Verbindegraden parallel zur Kegelachse Ebenen legt, so schliessen Letztere Winkel ein, die der Reihe nach gleich sind den Winkeln, welche die durch die Kegelachse und jene Punkte gelegten Ebenen unter einander bilden. (Es ist diese Eigenschaft eine Folge des Satzes der ebenen Geometrie von gleichen Peripheriewinkel — hier Neigungswinkel genannter Ebenen — auf gleichen Bogen.)

Ferner: Wenn man durch einen beliebigen Punkt der Curve und durch die z-Achse eine Ebene, und

durch denselben Punkt und denjenigen Curvenpunkt, wo die Ordinate z ein Maximum erreicht hat, eine zu jener (der z-Achse) parallele Ebene legt, so sind diese beiden Ebenen stets aufeinander senkrecht. (Eine Folge des Satzes vom rechten Winkel im Halbkreise.)

Ferner: Wird durch den Pol P senkrecht zur Kegelachse ein Schnitt geführt, und an die in diesem Schnitte liegende Leitcurve des Kreiscylinders von dem Pole aus eine Tangente gezogen, so ist deren Länge gleich der Länge des vom Pole aus auf die dem Winkel: $\xi = o$ entsprechende Kegelseite gefällten Lothes, d. i. dem kleinsten Abstande des Poles von der Kegelfläche, und zwar gleich $a\cos\varphi$.

In ähnlicher Weise lassen sich aus der Projection auf die xz-Ebene, die, wie oben gezeigt wurde, eine Parabel darstellt, manche Sätze ableiten über die Neigungswinkel gewisser Ebenen, die man senkrecht zur xz-Ebene führt. (Folgerungen aus entsprechenden Sätzen der Parabel.)

Die zahlreichen Eigenschaften des Kreises und der Parabel als Erzeugnisse projectivischer Punktenreihen und Strahlenbüschel angesehen im Verein mit der doppeltsymmetrischen Gestalt der Curve liessen noch manche andere Merkmale derselben erschliessen. Im Folgenden werden wir noch Einige kennen lernen.

Bestimmung der Richtungswinkel der Tangenten unserer Curve und Gleichung derselben.

Es seien: α_1, β_1 und γ_1 die Winkel, welche eine beliebige Tangente der Curve mit den bezüglichen Achsen bilde, und deren Cosinuse durch die Quotien-

ten: $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ und $\frac{dz}{ds}$ dargestellt werden. Es handelt sich nun zunächst darum, jede einzelne der Ordinaten: x, y und z als eine Funktion des mehrgenannten veränderlichen Winkels ξ darzustellen. Zu diesem Ende führen wir die Richtungscosinuse der Kegelseiten, welche bereits zu Anfang ermittelt worden, ein, und wir erhalten mit deren Hülfe:

$x = a\sin^2\varphi\cos^2\xi$; $y = a\sin^2\varphi\sin\xi\cos\xi$; $z = a\sin\varphi.\cos\varphi.\cos\xi$

und es lassen sich jetzt die Winkel: α_1, β_1 und γ_1 aus den Gleichungen:

$$\cos\alpha_1 = \frac{2\sin\varphi\cos\xi\sin\xi}{\sqrt{4\sin^2\varphi\sin^2\xi\cos^2\xi + \sin^2\varphi\cos^2 2\xi + \cos^2\varphi\sin^2\xi}}$$

$$\cos\beta_1 = \frac{\sin\varphi\cos 2\xi}{\sqrt{4\sin^2\varphi\sin^2\xi\cos^2\xi + \sin^2\varphi\cos^2 2\xi + \cos^2\varphi\sin^2\xi}}$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{\cos\varphi\sin\xi}{\sqrt{4\sin^2\varphi\sin^2\xi\cos^2\xi + \sin^2\varphi\cos^2 2\xi + \cos^2\varphi\sin^2\xi}}$$

bestimmen.

Sehr einfach gestalten sich diese Werthe für die Winkel $\xi = 30^0$, $= 120^0$, $= 210^0$ und $= 330^0$, weil alsdann der Nenner obiger Ausdrücke rational und zwar $= 1$ wird; wir erhalten:

$\cos\alpha_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\varphi$, $\cos\beta_1 = \frac{1}{2}\sin\varphi$; $\cos\gamma_1 = \frac{1}{2}\cos\varphi$

wobei noch die Vorzeichen zu berücksichtigen sind.

Um nun die Frage, ob unsere Curve parallele Tangenten habe, zu beantworten ist nur nothwendig nachzusehen, ob für mehrere Werthe des Winkels ξ die Ausdrücke $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$ und $\cos\gamma_1$ identisch werden. Die Untersuchung ergiebt aber, dass für: $\xi = 45^0$, $= 135^0$, $= 225^0$ und $= 315^0$ solches stattfinde und zwar sind die den Werthen: $\xi = 45^0$ und $= 315^0$ und ande-

rerseits den Werthen: $\xi=135$ und $=225^0$ entsprechenden Tangenten unter sich parallel.

Die Richtungscosinuse der Ersteren sind:

$$\cos\alpha_1=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\operatorname{cotg}^2\varphi}};\quad \cos\beta_1=0;\quad \cos\gamma_1=\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{\sqrt{2+\operatorname{cotg}^2\varphi}},$$

die der Letzteren:

$$\cos\alpha_1=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\operatorname{cotg}^2\varphi}};\quad \cos\beta=0;\quad \cos\gamma_1=-\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{\sqrt{2+\operatorname{cotg}^2\varphi}},$$

es stehen somit beide Paare senkrecht zur y-Achse.

Die Gleichung der Tangenten unserer Curve, welche aus der Verbindung der Gleichungeu ihrer Projectionen auf die xy- und xz-Ebene entsteht, ist folgende:

$$Y=-\operatorname{cotg}2\xi X+\tfrac{1}{2}a\sin^2\varphi\operatorname{cotg}\xi$$

und $$Z=\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2\cos\xi}X+\tfrac{1}{2}a\cos\varphi\sin\varphi\cos\xi$$

Es liefert diese Gleichung wiederum den Beweis, dass die Curve für $\xi=0^0$ und $=180^0$ im Maximum ihrer Ordinaten z ist; denn es repräsentiren in der xz-Ebene ein Punkt, in der xy-Ebene eine mit der y-Achse parallele Gerade die Projectionen der an die entsprechenden Curvenpunkte gelegten Tangenten. Ebenso folgt ohne Weiteres, dass die den Winkeln: $\xi=90^0$ und $=270^0$ entsprechenden Tangenten erstlich in der yz-Ebene liegen und zweitens mit den durch diese Ebene ausgeschnittenen Kegelseiten zusammenfallen.

Bezeichnet η den Winkel, den die Projection der Tangente auf die xy-Ebene mit der positiven Richtung der x-Achse, ferner ζ den Winkel, welchen die Projection auf der yz-Ebene mit der positiven Richtung der z-Achse, und endlich ϑ den Winkel, den die Projection auf der xz-Ebene mit der positiven Richtung

der x-Achse bildet, so ist: tang $\eta = -\cot g 2\xi$;
tang $\zeta = -\frac{\cos 2\xi}{\sin \xi}$ tang φ, und tang $\vartheta = \frac{\cot g \varphi}{2\cos \xi}$.

Man gelangt zu diesen Werthen einerseits durch Aufstellung der Gleichungen der einzelnen Projectionen, andererseits durch Bildung der Quotienten: $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dz}$ und $\frac{dz}{dx}$ aus den Ausdrücken:

$x = a\sin^2\varphi\cos^2\xi$, $y = a\sin^2\varphi\sin\xi.\cos\xi$; und
$z = a\sin\varphi.\cos\varphi.\cos\xi$.

Denken wir uns für alle möglichen Lagen des Poles P auf der x-Achse die zugehörigen Fusspunkten-Curven verzeichnet, so erhalten wir als Projectionen der Letzteren auf die drei Coordinaten-Ebenen je eine Schaar ähnlicher und ähnlich liegender Gebilde, deren jedesmaliger Aehnlichkeitspunkt die Projection des Kegelscheitels auf die betreffende Ebene ist. Denn da die Projectionen der Tangenten zugleich Tangenten der entsprechenden Projectionen unserer Curve sind, deren Richtungscosinuse nur von der veränderlichen: ξ abhängen, so werden sämmtliche Tangenten, welche wir in den Schnittpunkten der Projection einer beliebigen Kegelseite mit der gleichnamigen Projection unserer Curvenschaar, unter sich parallel sein: Die Projectionen der Kegelseiten sind in allen Fällen die Aehnlichkeitsstrahlen.

Da bei der Bewegung des Poles P auf der x-Achse die Projectionen der Fusspunktencurven auf der xz-Ebene eine Schaar von Parabeln ausmachen, deren Scheitel zusammenfallen, und deren Achsenrichtung dieselbe ist, so haben wir durch obige Betrachtung zugleich den für eine solche Parabelschaar gültigen Satz

bewiesen, dass, wenn man nach einer beliebigen Richtung vom Scheitelpunkte aus eine Gerade zieht, und an die Durchschnittspunkte dieser mit den Parabeln an Letztere Tangenten legt, diese unter sich parallel sind; oder dass Parabeln stets ähnlich sind und zugleich ähnlich liegen, wenn ihre Scheitel und Achsenrichtungen zusammenfallen. Dasselbe gilt, wie schon die elementare Geometrie lehrt, von einer Kreisschaar, wenn die Kreise sich innerlich und zwar in Einem Punkte berühren.

Wir haben oben gesehen, dass die den Winkeln: $\xi=45^0$, $=315^0$, $=135^0$ und 225^0 entsprechenden Tangenten senkrecht zur y-Achse, mithin parallel der xz-Ebene sind. Daraus folgt, dass für diese Werthe von ξ absolut genommen:

$\text{tang}\,\vartheta=\text{cotg}\gamma_1$; $\text{tang}\chi=\text{tang}\zeta=0$

sein muss, was wir in der That erhalten aus den zur Bestimmung dieser Winkel früher aufgestellten Ausdrücken.

Für die Winkel: $\xi=30^0$, $=150^0$, $=210^0$ und $=330^0$ erhalten wir:

$$\text{tang}\vartheta=\frac{\text{cotg}\varphi}{\sqrt{3}};\quad \text{tang}\chi=-\frac{1}{\sqrt{3}}\quad\text{und}\quad \text{tang}\zeta=-\text{tang}\varphi$$

während sich bei: $\xi=60^0$, $=120^0$, $=240^0$ und $=300^0$ hiefür die Werthe ergeben:

$$\text{tang}\vartheta=\text{cotg}\varphi;\quad \text{tang}\chi=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad\text{und}\quad \text{tang}\zeta=\frac{\text{tang}\varphi}{\sqrt{3}}$$

Aus dem Umstande, dass bei $\xi=30^0$, $=150^0$, $=210^0$ und $=330^0$ $\text{tang}\zeta=-\text{tang}\varphi$ ist, folgt, dass sich die Projection unserer Fusspunktencurve auf der yz-Ebene in einen Rhombus einbeschreiben lässt; dieser geht in ein Quadrat über, wenn der Winkel $\varphi=45^0$ ist. Die

im Schnittpunkte der Diagonalen gezogenen Parallelen zu den Seiten des Rhombus (oder Quadrates) sind die Tangenten der Curve im Doppelpunkte.

Die Rectification der letztgenannten Projection der Curve, sowie deren Quadratur lassen sich durch Einführung von Polarcoordinaten — den Polarwinkel: ψ und den Radius rector: r — bewirken. Die erstere Untersuchung führt auf ein ziemlich complicirtes Integral, während deren Quadratur in folgender Weise ausgeführt wird und zu einem interessanten Resultate führt.

Wie bereits früher erwähnt, lautet die Gleichung der Curve:

$$z^4 - a^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi z^2 + a^2 \cos^4\varphi y^2 = 0;$$

Da nun: $\frac{y}{z} = \operatorname{tang}\psi$ ist, so erhält dieselbe mit Bezug auf das neu eingeführte (Palar-)Coordinatensystem die Form:

$$r = \frac{a\cos\varphi}{\cos^2\psi} \sqrt{\cos^2\psi - \cos^2\varphi};$$

es ist daher das Ergebniss der Quadratur

$$J = \frac{a^2\cos^2\varphi}{2} \left\{ \int \frac{d\psi}{\cos^2\psi} - \cos^2\varphi \int \frac{d\psi}{\cos^4\psi} \right\}.$$

Bei Ausführung dieser Integrale ist der Zusammenhang des Polarwinkels: ψ und des Winkels: ξ, der in der Gleichung:

$$\operatorname{tang}\varphi \sin\xi = \operatorname{tang}\psi$$

besteht, zu berücksichtigen. Für $\xi = 90^0$ wird der Winkel ψ gleich dem Winkel φ. Die einzuführenden Grenzen sind also o und φ, woraus sich als Inhalt eines Quadranten unserer Curve der Ausdruck:

$$J = \frac{a^2 \sin^3\varphi \cos\varphi}{3}$$

ergiebt. Derselbe ist also identisch mit dem dritten Theile des Flächeninhaltes eines Rechteckes, dessen Seiten die Ordinaten des dem Winkel $\xi=0^0$ (oder $\xi=180^0$) entsprechenden Curvenpunktes sind. Vergleiche man diesen Inhalt mit dem Inhalte des Ebenenstückes, welches von der Projection der Fusspunktencurve auf der xz-Ebene (nämlich der Parabel) und der Umrissseite des Kegels begrenzt wird, so findet man, dass Letzterer das Doppelte von jenem ist.

Mit Bezug auf das, was oben über die in den Projections-Ebenen entstehenden Schaaren gleichartiger Curven gesagt ist — wenn sich nämlich der Pol P auf der x-Achse bewegt, — möge nur noch erwähnt werden, dass, wenn P in's Unendliche fällt, die Projection der Fusspunktencurve auf der xy-Ebene mit der y-Achse, diejenige auf der xz-Ebene mit der z-Achse, und endlich diejenige auf der yz-Ebene mit den in genannte Ebene fallenden Kegelseiten identisch ist; es sind somit die genannten Gebilde als Specialitäten der betreffenden Curvenschaaren autzufassen. Die Fusspunktencurve selber degenerirt bei: $a=\infty$ in die den Winkeln: $\xi=90^0$ und $\xi=270^0$ entsprechenden Kegelseiten.

Bestimmung der Krümmung und Gleichung der Evolute der Fusspunkten-Curve.

Um für eine beliebige Stelle unserer Curve den Krümmungsradius: ρ seiner Länge nach zu bestimmen, müssen wir auf die früher aufgestellten Ausdrücke für die Richtungs-Cosinuse der Tangente zurückgehen.

Bezeichnen wir der besseren Uebersicht wegen den in jenen Gleichungen vorkommenden Nenner:

$$\sqrt{4\sin^2\varphi\sin^2\xi\cos^2\xi+\sin^2\varphi\cos^2 2\xi+\cos^2\varphi\sin^2\xi}$$

kurzweg mit: $\sqrt{v}$, so hatten wir:

$$\cos\alpha_1=\frac{2\sin\varphi\sin\xi\cos\xi}{\sqrt{v}};\quad \cos\beta_1=\frac{\sin\varphi\cos 2\xi}{\sqrt{v}};\ \text{und}$$

$$\cos\gamma_1=\frac{\cos\varphi\sin\xi}{\sqrt{v}}$$

Ist nun $d\tau$ der sog. Contingenzwinkel, so besteht die Gleichung:

$$(d\tau)^2=(d\cos\alpha_1)^2+(d\cos\beta_1)^2+(d\cos\gamma^4)^2;$$

endlich ist $\rho=\frac{ds}{d\tau}$, oder:

$$\rho=\frac{ds}{\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}}$$

Die Ausführung des vorstehenden Ausdruckes giebt, da $ds=a\sin\varphi\sqrt{v}$ ist, das Resultat:

$$\rho=a.\sin\varphi\frac{2v^2}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

worin:

$A=-4v\sin\varphi\cos 2\xi+2\sin\varphi\sin\xi\cos\xi.w$

$B=-v\sin\varphi\sin 2\xi-\sin\varphi\cos 2\xi.w$

$C=-2v\cos\varphi\cos\xi+\cos\varphi.\sin\xi.w$

ist, wenn man unter w versteht:

$dv=8\sin^2\varphi(\sin\xi\cos^3\xi-\cos\xi\sin^3\xi)-\sin^2\varphi\cos 2\xi\sin 2\xi$
$+2\cos^2\varphi\sin\xi\cos\xi.$

Wenden wir diese Formel auf den Doppelpunkt der Curve an, setzen demnach: $\xi=90^0$ und $\xi=270^0$, so erhält man als Ergebniss:

$$\rho=\frac{a}{2}.$$

Die Curve hat also an dieser Stelle die Krümmung der Kugelfläche, welche in der Durchdringung mit dem

Kegel Jene erzeugt. Ist der Pol unendlich entfernt, so ist der Krümmungsradius für jeden Punkt der Curve unendlich gross; dieselbe fällt, wie bereits oben erwähnt worden, mit den den Winkeln $\xi=90^0$ und $\xi=270^0$ entsprechenden Kegelseiten zusammen.

Setzen wir endlich in die gefundene Formel für ρ die Werthe 0^0 und 180^0 für ξ ein, so wird:

$$\rho=\frac{a\sin^2\varphi}{\sqrt{4+\cot g^2\varphi}}$$

der Krümmungsradius für diejenige Stelle der Curve, wo die Ordinate z ein Maximum (oder Minimum) ist.

Die Coordinaten x_1, y_1 und z_1 des Krümmungsmittelpunktes für irgend eine Stelle der Curve (x, y und z) werden mit Hülfe der Richtungscosinuse des Krümmungsradius in Bezug auf die Achsen, wie folgt, gefunden.

Es seien α_2, β_2 und γ_2 die Winkel, welche der Radius mit den bezüglichen Achsen bilde, so ist:

$$x_1=x+\rho\cos\alpha_2$$
$$y_1=y+\rho\cos\beta_2$$
$$z_1=z+\rho\cos\gamma_2$$

oder, da:

$$\cos\alpha_2=\frac{d.\cos\alpha_1}{d\tau}=\frac{d.\frac{dx}{ds}}{d\tau}$$

$$\cos\beta_2=\frac{d.\cos\beta_1}{d\tau}=\frac{d.\frac{dy}{ds}}{d\tau}$$

$$\cos\gamma_2=\frac{d.\cos\gamma_1}{d\tau}=\frac{d.\frac{dz}{ds}}{d\tau}$$

und ferner $d\tau=\frac{ds}{\rho}$ ist,

$$x_1 = \chi + \rho^2 \frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds}\,;\quad y_1 = y + \rho^2 \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}$$

$$z_1 = z + \rho^2 \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}$$

Die Anwendung dieser allgemeinen Formeln auf unsere Curve nun liefert das Ergebniss:

$$x_1 = a\sin^2\varphi\cos^2\xi + \frac{2a\sin\varphi v^2 A}{A^2+B^2+C^2}$$

$$y_1 = a\sin^2\varphi\sin\xi\cos\xi + \frac{2a\sin\varphi v^2 B}{A^2+B^2+C^2}$$

$$z_1 = a\sin\varphi\cos\varphi\cos\xi + \frac{2a\sin\varphi v^2 C}{A^2+B^2+C^2};$$

in diesen Gleichungen haben: v, A, B und C die bereits oben angegebene Bedeutung. Setzt man in obige Ausdrücke $\xi = 90^0$ (oder $= 270^0$), so erhält man, übereinstimmend mit dem erhaltenen Resultate für die Länge des Krümmungsradius ρ im Doppelpunkte der Curve:

$$x_1 = \frac{a}{2};\ y_1 = 0 \text{ (denn } B = 0);\ z_1 = 0 \text{ (denn } C = 0).$$

Ferner ergeben sich durch Einsetzen der Werthe: $\xi = 0^0$ und $\xi = 180^0$ die Coordinaten:

$$x_1 = a\sin^2\varphi - \frac{a\sin^2\varphi}{4+\cot g^2\varphi};\ y_1 = 0 \text{ (denn } B = 0)$$

und $z_1 = \pm(a\sin\varphi\cos\varphi - \frac{a\sin^2\varphi}{4+\cot g^2\varphi}\cot g\varphi)$

Vereinigt man die oben aufgestellten Gleichungen für: x_1, y_1 und z_1 mit den bekannten Gleichungen der Curve, so resultirt hieraus die Gleichung des Ortes sämmtlicher Krümmungsmittelpunkte, d. i. die der Evolute, Von dem Verlaufe der Letzteren lässt sich je-

doch schon aus blosser Anschauung ein ungefähres Bild entwerfen.

Dieselbe hat, entsprechend dem Doppelpunkte unserer Fusspunktencurve (ihrer Evolvente) ebenfalls einen Doppelpunkt und zwar in $x=\frac{a}{2}$, bildet, wie Jene, zwei sowohl zur xy- als xz-Ebene symmetrisch liegende Schleifen. Die Projection der Evolute auf der xz-Ebene wird eine der Parabel ähnliche Curve sein, deren Concavität jedoch die entgegengesetzte Richtung hat mit der der gleichnamigen Projection ihrer Evolvente. Ferner entsprechen sich Evolute und Evolvente in der Weise, dass zusammengehörige Curventheile immer zu verschiedenen Seiten der xz-Ebene liegen.

Die Schmiegungsebenen der Fusspunktencurve.

Legt man durch einen Punkt einer (Raum-)Curve eine Ebene so, dass Letztere sowohl den dem Curvenpunkte entsprechenden Krümmungradius als die an jenen Punkt angelegte Tangente in sich aufnimmt, so wird diese Ebene die Schmiegungsebene der fraglichen Stelle der Curve genannt. Gemäss dieser Definition lässt sich nun die Gleichung der Schmiegungsebenen wie folgt herleiten.

Denkt man sich eine Ebene durch den Krümmungsradius gelegt senkrecht zu dem betreffenden Curvenelemente, d. i. die Normalebene, so giebt es in dieser Ebene eine Gerade, welche auf dem Krümmungsradius senkrecht steht, also auch senkrecht steht zur Schmiegungsebene. Es seien nun: $\cos\lambda$, $\cos\mu$ und $\cos\nu$ die Richtungscosinuse genannter Geraden in Bezug auf die

respectiven Achsen, alsdann gelten folgende zwei Gleichungen:

$$o = \cos\alpha_1 \cos\lambda + \cos\beta_1 \cos\mu + \cos\gamma_1 \cos\nu$$
$$o = \cos\alpha_2 \cos\lambda + \cos\beta_2 \cos\mu + \cos\gamma_2 \cos\nu$$

woraus unmittelbar:

$$\cos\lambda = \begin{vmatrix}\cos\beta_1 \cos\gamma_1 \\ \cos\beta_2 \cos\gamma_2\end{vmatrix}; \quad \cos\mu = \begin{vmatrix}\cos\gamma_1 \cos\alpha_1 \\ \cos\gamma_2 \cos\alpha_2\end{vmatrix}$$
$$\cos\nu = \begin{vmatrix}\cos\alpha_1 \cos\beta_1 \\ \cos\alpha_2 \cos\beta_2\end{vmatrix}$$

folgt, oder, wenn wir die Werthe:

$$\cos\alpha^1 = \frac{dx}{ds}; \quad \cos\beta^1 = \frac{dy}{ds}; \quad \cos\gamma_1 = \frac{dz}{ds}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{d^2x}{(ds)^2}\,\rho; \quad \cos\beta_2 = \frac{d^2y}{(ds)^2}\,\rho; \quad \cos\gamma_2 = \frac{d^2z}{(ds)^2}\,\rho$$

substituiren:

$$\cos\lambda = \frac{\rho}{(ds)^3}\begin{vmatrix}dy, & dz \\ d^2y, & d^2z\end{vmatrix}; \quad \cos\mu = \frac{\rho}{(ds)^3}\begin{vmatrix}dz, & dx \\ d^2z, & d^2x\end{vmatrix}$$
$$\cos\nu = \frac{\rho}{(ds)^3}\begin{vmatrix}dx, & dy \\ d^2x, & d^2y\end{vmatrix}$$

worin:

$$\frac{dx}{d\xi} = -2a\sin^2\phi\sin\xi\cos\xi; \quad \frac{dy}{d\xi} = a\sin^2\phi\cos 2\xi$$
$$\frac{dz}{d\xi} = -a\sin\phi\cos\phi\sin\xi$$

und:

$$\frac{d^2x}{(d\xi)^2} = -2a\sin^2\phi\cos^2\xi; \quad \frac{d^2y}{(d^2\xi)^2} = -\tfrac{1}{2}a\sin^2\phi\sin 2\xi$$
$$\frac{d^2z}{(d\xi)^2} = -a\sin\phi\cos\phi\cos\xi$$

zu setzen ist.

Sind nun: X, Y und Z die laufenden Coordinaten der Schmiegungsebene, so stellt die Gleichung:

$$(X-x)\cos\lambda + (Y-y)\cos\mu + (Z-z)\cos\nu = o$$

die einem Punkte (x, y, z) der Curve zugehörende Schmiegungsebene dar.

Die Schmiegungsebenen der im Doppelpunkte zusammenfallenden beiden Curvenelemente stehen normal zur yz-Ebene und bilden miteinander den Winkel: 2φ. Die eine wie die andere Eigenthümlichkeit dieser Ebenen geht aus der zu Anfang aufgestellten Definition hervor und ist eine Folge obiger Gleichung.

Torsion der Fusspunktencurve oder Bestimmung des Radius zweiter Krümmung.

Da man unter Torsion einer Curve den allmäligen Uebergang derselben aus einer Schmiegungsebene in die unmittelbar darauf folgende versteht, so ist dieselbe abhängig von dem Winkel: $d\omega$, den zwei unendlich benachbarte Schmiegungsebenen mit einander bilden, und welchen auch zwei auf diesen normal stehenden Ebenen einschliessen. In dem Durchschnitte dieser Letzteren ist der Torsionsmittelpunkt zu suchen, während der Torsionsradius, den wir mit ρ_1 bezeichnen wollen, mit der Schnittkante zusammenfällt.

Hienach ist also:

$$\rho_1 = \frac{ds}{d\omega}$$

In analoger Weise, wie wir oben den Contingenzwinkel: $d\tau$ berechnet haben, verfahren wir bei der Aufsuchung des Torsionswinkels: $d\omega$; es sind nämlich hier nur die Richtungscosinuse: $\cos\lambda$, $\cos\mu$ und $\cos\nu$ an Stelle von $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$ und $\cos\gamma_1$ zu setzen. Man hat daher:

$$(d\omega)^2 = (d.\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2$$

Bequemer gelangt man jedoch zu dem Werthe von $d\omega$, wenn man den Inhalt der Pyramide, welche von zwei aufeinanderfolgenden Schmiegungsebenen, ferner von den durch die unendlich kleine Sehne und das Curvenelement gelegte Ebenen begrenzt wird, durch die bekannte Determinante aus den Coordinaten ihrer Eckpunkte ausdrückt, die Grösse: $d\omega$ im Resultate einführt und diese alsdann aus der Endgleichung bestimmt. Man erhält alsdann:

$$d\omega = \frac{1}{(ds)^3 (d\tau)^2} \begin{vmatrix} dx, & d^2x, & d^3x \\ dy, & d^2y, & d^3y \\ dz, & d^2z, & d^3z \end{vmatrix}$$

worin neben den bereits oben angegebenen Werthen von dx, dy, dz und d^2x, d^2y, d^2z noch

$$\frac{d^3x}{(d\xi)^3} = a\sin^2\varphi\sin 2\xi\,; \quad \frac{d^3y}{(d\xi)^3} = -\tfrac{1}{4}a\sin^2\varphi\cos 2\xi\,;$$

$$\frac{d^3z}{(d\xi)^3} = a\sin\varphi\cos\varphi\sin\xi,$$

ferner $(d\tau)^2 = \frac{a^2\sin^2\varphi . v}{\rho^2}$ einzusetzen sind. Man erhält unter Beibehaltung der Bezeichnungen A, B, C u. v und nach einiger Umformung:

$$\rho_1 = \frac{a^4\sin^4\varphi(A^2+B^2+C^2)}{4.v \begin{vmatrix} dx, & d^2x, & d^3x \\ dy, & d^2y, & d^3y \\ dz, & d^2z, & d^3z \end{vmatrix}}$$

Für die Werthe $\xi = 90^0$ und $\xi = 270^0$, also für den Doppelpunkt der Curve nimmt obige Formel folgende einfache Gestalt an:

$$\rho_1 = \frac{8}{3} a \operatorname{tang}\varphi,$$

so dass an genannter Stelle die Proportion:

$$\rho : \rho_1 = 3 : 16 \operatorname{tang} \varphi$$

Geltung hat.

Während also im Doppelpunkte die Krümmung der Curve vom Winkel φ unabhängig ist, nimmt die Torsion derselben in dem Verhältnisse der Zunahme der Tangente des Winkels: φ ab. Ist der Pol unendlich fern, so ist auch ρ_1 unendlich gross, also keine Torsion.

Die im Nenner unseres Ausdruckes stehende Determinante wird für die Werthe $\xi = 0^0$ und $\xi = 180^0$ zu Null, d. h. $\rho_1 = \infty$. Hieraus folgt, dass hier die beiden benachbarten Schmiegungsebenen zusammenfallen, mithin die Berührung der an den betreffenden Stellen der Curve gezogenen Tangente eine dreipunktige ist.

Allgemeine Formel zur Bestimmung des Steigungswinkels von Fusspunktencurven auf geraden Kreiskegeln.

Der allgemeine Ausdruck für die Entfernung irgend eines Curvenpunktes von dem Scheitel des Kegels, welche gleich zu Anfang mit OQ bezeichnet worden ist, lautete:

$$OQ = a \sin\varphi . \cos\xi + c \cos\varphi$$

woraus:

$$d.OQ = -a \sin\varphi \sin\xi . d\xi$$

folgt. Bezeichnen wir nun mit ε den Steigungswinkel der Curve, so ist:

$$\frac{d.OQ}{ds} = \frac{-a \sin\varphi \sin\xi}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}} = \sin\varepsilon$$

wobei dx, dy und dz aus den Formeln:

$x = a\sin^2\varphi\cos^2\xi + c\cos\varphi\sin\varphi\cos\xi$

$y = a\sin^2\varphi\sin\xi\cos\xi + c\cos\varphi\sin\varphi\sin\xi$

$z = a\sin\varphi\cos\varphi\cos\xi + c\cos^2\varphi$

zu bilden sind; also:

$$\frac{dx}{d\xi} = -2a\sin^2\varphi\cos\xi\sin\xi - c\cos\varphi\sin\varphi\sin\xi$$

$$\frac{dy}{d\xi} = a\sin^2\varphi\cos 2\xi + c\cos\varphi\sin\varphi\cos\xi$$

$$\frac{dz}{d\xi} = -a\sin\varphi\cos\varphi\sin\xi.$$

Der Winkel ε wird ein Rechter sein, wenn $\sin\varepsilon = 1$, also $\cos\xi = -\frac{c}{a}\cot g\varphi$ ist. Es folgt hieraus, dass von allen Seiten der Kegelfläche nur diejenigen, für welche die betreffenden Curvenpunkte in den Scheitel des Kegels fallen, Tangenten an der Curve sind.

Für solche Curvenelemente, welche parallel sind der xz-Ebene ist der Steigungswinkel gleich dem Winkel: α_1, den die an dasselbe gelegte Tangente mit der x-Achse bildet. Es gilt diess also, vorausgesetzt dass $\frac{c}{a} = \text{tang}\varphi$ sei, für die Werthe: $\xi = 60^0$ und $\xi = 300^0$, und, wenn wir $c = o$ annehmen, für die Werthe: $\xi = 45^0$ und $\xi = 315^0$ einerseits, andererseits für: $\xi = 135^0$ und $\xi = 225^0$. — (Vergl. den Abschnitt über die Richtungswinkel der Tangenten etc.)

Bevor wir zur Rectification unserer speciellen Fusspunktencurve übergehen, mögen hier noch einige Untersuchungen über Flächen- und kubischen Inhalt gewisser Theile der geometrischen Gebilde, bei deren Durchdringung, wie wir gesehen haben, diese entsteht, eingeschoben werden.

Inhaltsbestimmung des von der Fusspunktencurve umschlossenen Kegelmantelstückes.

Die Berechnung des Inhaltes des von der Fusspunktencurve umschlossenen Kegelmantelstückes geschieht am zweckmässigsten dadurch, dass man die Kegelfläche entwickelt, d. h. in die Ebene abrollt, alsdann die (abgewickelte) Curve auf ein Polarcoordinatensystem bezieht. Die Polarachse desselben sei die dem Winkel: $\xi=0^0$ entsprechende Kegelseite, der Pol der Kegelscheitel. Die Curve durchschneidet die Achse in der Entfernung: $a.\sin\varphi$ vom Pole. Ziehen wir nun einen beliebigen Radius: $R=a\sin\varphi.\cos\xi$, so bildet derselbe mit der Achse den Polarwinkel: ψ, welcher der Gleichung:

$$\psi=\sin\varphi.\xi$$

unterworfen ist. Die Gleichung der Curve auf genanntes System bezogen, lautet demnach:

$$R=a\sin\psi\cos\left(\frac{\sin\varphi}{\psi}-\right),$$

und der fragliche Inhalt wird durch das Integral

$$I=2a^2\sin^2\varphi\int_0^{\sin\varphi.\frac{\pi}{2}}\cos^2\frac{\psi}{\sin\varphi}d\psi$$

ausgedrückt. Hieraus folgt:

$$I=\frac{\pi}{2}a^2\sin^3\varphi$$

Denken wir uns die Kegelfläche in den Entfernungen: $\pm a\sin\varphi\cos\varphi$ vom Scheitel durch Ebenen senkrecht zur Kegelachse geschnitten, so stellt sich der Inhalt des zwischen beiden Schnitten liegenden Theiles des Kegelmantels durch die Formel:

$$I_1 = 2\pi a^2 \sin^3\varphi$$

dar, und es ist demnach: $I_1 = 4J$.

Berechnung des kubischen Inhaltes desjenigen Stückes des Kreiskegels, welches bei der Durchdringung des Kegels mit dem parabolischen Cylinder durch Letzteren abgeschnitten wird. (Die Lage der beiden Körper ist bereits in dem Abschnitte über die Projectionen unserer Fusspunktencurve fixirt worden.)

Denkt man sich den Kegel an irgend einer Stelle senkrecht zur Achse durch eine Ebene geschnitten, so wird der dadurch entstehende Querschnitt des zu berechnenden Kegeltheiles (welcher einen Kreisabschnitt bildet) unter Beibehaltung des ursprünglichen — rechtwinkligen — Coordinatensystems durch die Formel:

$$\frac{a^2}{2} - \sin^4\varphi \cos^2\xi (2\xi - \sin 2\xi)$$

dargestellt; der fragliche Inhalt ist demnach:

$$a^2 \sin^4\varphi \int \cos^2\xi (2\xi - \sin 2\xi).dz$$

oder, da: $dz = -a \sin\varphi \cos\varphi \sin\xi . d\xi$ ist:

$$a^3 \sin^5\varphi \cos\varphi \int \cos^2\xi \sin\xi (2\xi - \sin 2\xi) d\xi$$

in welchem Integral die veränderliche: ξ zwischen den Grenzen: 0 und: $\frac{\pi}{2}$, entsprechend den Grenzen: $a \sin\varphi \cos\varphi$ und: o der Ordinate: z zu nehmen ist. Hiefür lässt sich ohne Weiteres setzen:

$$2a^3 \sin^5\varphi \cos\varphi \left\{ \int \cos^2\xi \sin\xi . \xi d\xi - \int \cos^3\xi \sin^2\xi d\xi \right\}$$

Die Ausführung dieser Integral ergiebt aber: $\frac{4}{45}$, so dass also der fragliche Inhalt

$$\frac{8a^3\sin^5\varphi\cos\varphi}{45}$$

ist.

Für den Rauminhalt des parabolischen Cylinders, soweit derselbe bei der Durchdringung mit dem Kegel in Betracht kommt, ist durch den Ausdruck:

$$\frac{16}{15}a^3\sin^5\varphi\cos\varphi$$

das Mass gegeben. Dieses Resultat wird durch die Lösung des Integrals:

$$a^3\sin^5\varphi\cos\varphi\int\left\{\sin\xi.\xi-\sin^2\xi\cos^3\xi+\sin^4\xi.\cos\xi\right\}d\xi$$

gewonnen, das analog dem Integral der eben vorhergehenden Raumbestimmung hergestellt und ebenso zwischen den Grenzen: 0 und $\frac{\pi}{2}$ genommen wird.

Ein Vergleich dieser beiden Inhalte zeigt, dass Ersterer der sechste Theil des Letzteren ist.

Was den kubischen Inhalt des von dem Kreiskegel und dem diesen durchdringenden Kreiscylinder begrenzten Raumtheiles betrifft, so ist derselbe:

$$\frac{8}{9}a^3\sin^5\varphi\cos\varphi.$$

Bezeichnet man also die drei Volumen der Reihe nach mit: V, V_1 und V_2, so ist:

$$V:V_1:V_2=1:6:5.$$

Rectification der Fusspunktencurve.

Die Rectification der Fusspunktencurve kann auf zweierlei Weise geschehen, und zwar mit Hülfe der Raumcoordinaten: x, y und z, oder mittels der Polarcoordinaten ψ und R ihrer Abwickelung, deren Gleichung bereits bei der Inhaltsbestimmung des von der Curve auf dem Kegel eingeschlossenen Flächenstückes angegeben worden ist. Es wäre somit das Curvenelement:

$$ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2} = \sqrt{(dR)^2+(Rd\psi)^2}$$

Zweckmässig erscheint es mir von der genannten Gleichung:

$$R = a\sin\varphi\cos\left(\frac{\psi}{\sin\varphi}\right)$$

auszugehen; man erhält alsdann:

$$ds = a\sin\varphi \int \sqrt{\sin^2\frac{\psi}{\sin\varphi}+\sin^2\varphi\cos^2\frac{\psi}{\sin\varphi}}\, d.\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

oder durch die Substitution:

$$\sin^2\frac{\psi}{\sin\varphi} = \frac{1-\cos\frac{2\psi}{\sin\varphi}}{2} \quad \text{und} \quad \cos^2\frac{\psi}{\sin\varphi} = \frac{1+\cos\frac{2\psi}{\sin\varphi}}{2}$$

und nach einer kleinen Umformung:

$$ds = \frac{a}{2}\sin\varphi \int \sqrt{\frac{1+\sin^2\varphi}{2}} \int \sqrt{1-\frac{\cos^2\varphi}{1+\sin^2\varphi}\cos\frac{2\psi}{\sin\varphi}}\, d.\frac{2\psi}{\sin\varphi},$$

so dass die Länge eines Curvenquadranten durch den Ausdruck:

$$\frac{a}{2}\sin\varphi \int \sqrt{\frac{1+\sin^2\varphi}{2}} \int \left(1-\frac{\cos^2\varphi}{1+\sin^2\varphi}\cos\frac{2\psi}{\sin\varphi}\right)^{\frac{1}{2}} d\frac{2\psi}{\sin\varphi}$$

gegeben wird, wenn wir die Grenzen: o und: π einsetzen. Die Convergenz der entstehenden Potenzreihe lässt eine angenäherte Berechnung dieses Resultates zu; man erhält:

$$\frac{a}{2}\sin\varphi\sqrt{\frac{1+\sin^2\varphi}{2}}\left(\pi-\frac{1}{16}\frac{\cos^4\varphi}{(1+\sin^2\varphi)^2}\pi-\ldots\right)$$

Da die Abnahme der Glieder eine sehr bedeutende ist, und die Integration der ungeraden Potenzen des Cosinus den Werth: o ergiebt, so hat man eine angenähert berechnete Gesammtlänge:

$$L=\frac{a\sin\varphi(64\sin^2\varphi+15\cos^4\varphi)}{8\sqrt{2}(1+\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.\pi$$

Setzen wir in dieser Formel $\varphi=\frac{\pi}{2}$, so fällt die Durchschnittscurve der Kegel- und der Kugelfläche (welche Letztere in der Durchdringung mit Jener bildet), mit dem in der xy-Ebene liegenden grössten Kugelkreise zusammen. In der That liefern alsdann die letzten Formeln das hiemit übereinstimmende Resultat: $2a\pi$, d. h. die Länge der Curve ist gleich dem Umfange zweier grössten Kugelkreise (welche bei der gemachten Annahme des Winkels: φ zusammenfallen).

Die vorigen Ausdrücke für die Rectification der Curve sind um so brauchbarer, je mehr der Winkel φ sich einem Rechten nähert; ist endlich φ ein rechter Winkel, so stellt das im Scheitel O in der xy-Ebene liegende Strahlenbüschel die Gesammtheit der Kegelseiten dar. Die Fasspunkte der von P aus auf die Strahlen (Kegelseiten gefällten Lothe liegen auf einem Kreise über OP als Durchmesser und fallen zu je zwei (entsprechend den Winkeln: ξ und: $\pi+\xi$) aufeinander.

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass die Berechnung des Inhaltes des von der Curve auf dem parabolischen und Kreiscylinder eingeschlossenen Mantelstückes mit Hülfe der Entwickelung beider Cylinderflächen geschehen kann. Beziehen wir in beiden Fäl-

len die (entwickelte) Curve auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt mit dem Kegelscheitel und dessen eine Achsenrichtung mit der Richtung der Kegelachse zusammenfällt (so dass also die Curve in die yz-Ebene zu liegen kommt), so ist im ersten Falle:

$y_1 = a\sin^2\varphi\cos\xi\sin\xi$ und:

$$z_1 = \frac{a}{2}\sin\varphi\cos\varphi\cos\xi\sqrt{1+4\tan g^2\varphi\cos^2\xi} +$$

$$+\frac{a}{4}\cos^2\varphi \ln.(2\tan g\varphi\cos\xi + \sqrt{1+4\tan g^2\varphi\cos^2\xi})$$

die Relation der Coordinaten y, und z, der Curve.

Im zweiten Falle ergeben sich die einfacheren Ausdrücke:

$$y_2 = \frac{a}{2}\sin^2\varphi(\pi - 2\xi);\ z_2 = a\sin\varphi\cos\varphi\cos\xi,$$

so dass nun: $4\int y_1 dz_1$, oder (nach Einsetzung des früher angegebenen Werthes von $dz_1 = dz$) der Ausdruck:

$$2a^2\sin^3\varphi\cos\varphi\int(\pi - 2\xi)\sin\xi d\xi$$

genommen in den Grenzen: o und: $\frac{\pi}{2}$ den Inhalt des in den Kegelraum fallenden Stückes der Cylinderfläche darstellt, wenn wir diese durch zwei in $z = \pm a\sin\varphi\cos\varphi$ senkrecht zur Kegelachse geführte Schnitte begrenzt denken. Die Ausführung ergiebt:

$$2\pi a^2\sin^3\varphi\cos\varphi - 4a^2\sin^3\varphi\cos\varphi$$

und da $2\pi a^2\sin^3\varphi\cos\varphi$ der Gesammtinhalt des durch genannte Ebenen begrenzten Cylinderflächenstückes ist, so folgt, dass durch:

$$4a^2\sin^3\varphi\cos\varphi$$

der Inhalt des von der Curve umschlossenen Theiles

des mehrgenannten Kreiscylinders ausgedrückt ist. Es beträgt somit derselbe das Vierfache des aus dem Maximum der Ordinaten: z und x der Curve gebildeten Rechteckes.

Erklärung zu den in der Figurentafel enthaltenen Figuren.

Die in den Figuren verzeichneten — und durch leichte, horizontale Schraffirung hervorgehobenen — Fusspunktencurven sind sämmtlich als Durchdringungscurven einer Kugel- und einer Kreiskegeloberfläche construirt worden. Der Kugeldurchmesser ist gleich dem Abstande des Punktes (Poles) P vom Scheitel o des Kegels.

In Fig. 1 u. 2 der Tafel sind die Projectionen der Fusspunkten-Curve bei beliebig angenommener Lage des Punktes P auf die xz- und xy-Ebene dargestellt. Erstere ist eine Parabel vom Parameter: $p = \frac{1}{2} a \cos^2 \varphi$. Die Gleichung der andern Projection erhält man sofort durch Elimination der Ordinate: z aus den Gleichungen:

$$z = a \sin\varphi \cos\varphi \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = +c \cos^2\varphi$$

und $x^2+y^2-\tan g^2\varphi z^2 = o$

Diese Projection gehört zu einer Curvenschaar, zu der — als Specialitäten — auch die Cardioide und der Kreis gehören. Die beiden letztgenannten Curven sind in Fig. 4 als Projectionen auf die xy-Ebene der Fusspunktencurven dargestellt und zwar für die beiden speciellen Lagen des Poles (P) auf einer Geraden, die im Kegelscheitel o auf einer Kegelseite senkrecht steht,

und dann für die Lage des Punktes P auf der im Kegelscheitel zur Kegelachse Normalen. Die Projectionen der Fusspunktencurven auf der xz-Ebene sind Parabeln: $O(Q)(Q_0)$ und $Q_{180}OQQ_0$ — die Letztere ist zur x-Achse symmetrisch. — In Fig. 5 sind die Projectionen der Fusspunktencurven für die genannten speciellen Lagen des Poles (P) und P mit Hülfe der Fig. 3 und 4 auf die yz-Ebene hergestellt, und endlich giebt Fig. 6 die abgewickelte Fusspunktencurve auf dem in die Ebene ausgebreiteten Kegelmantelstücke, welches sich im Raumtheile der positiven x und positiven z befindet.

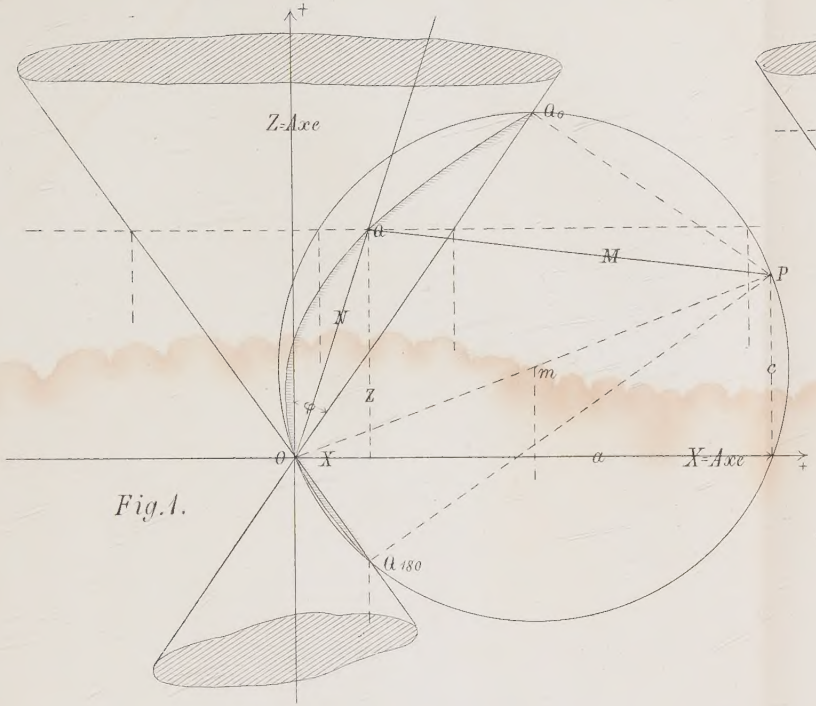


Fig. 1.

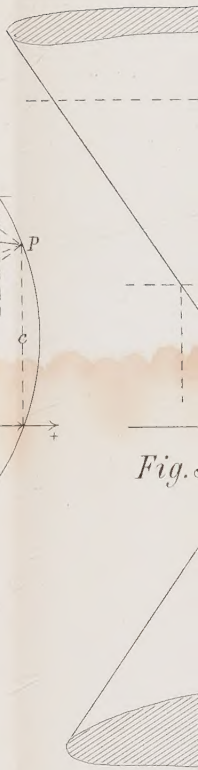


Fig. 3

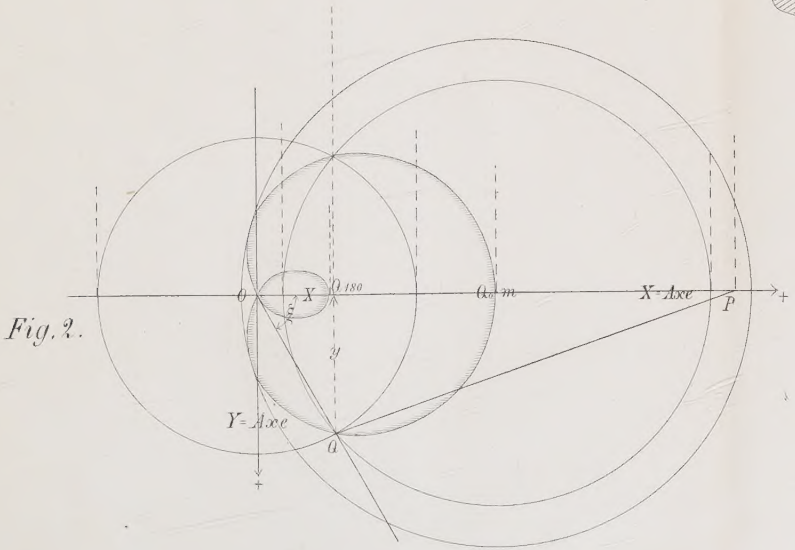


Fig. 2.

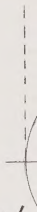
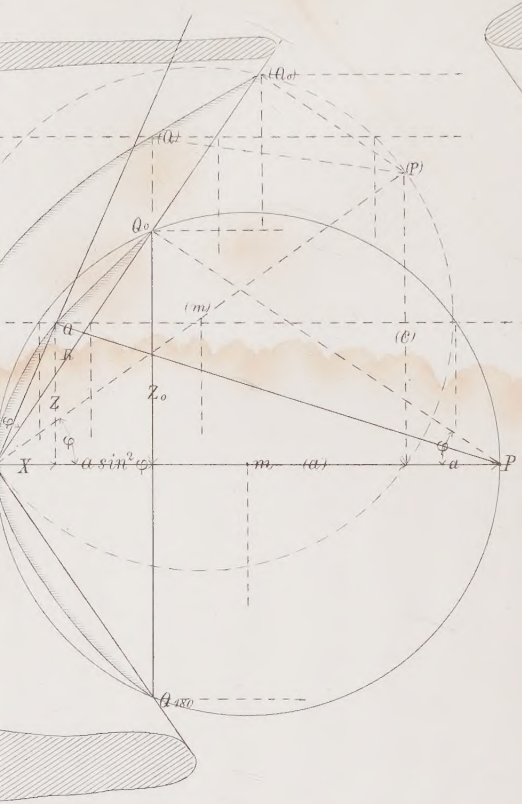


Fig. 4.



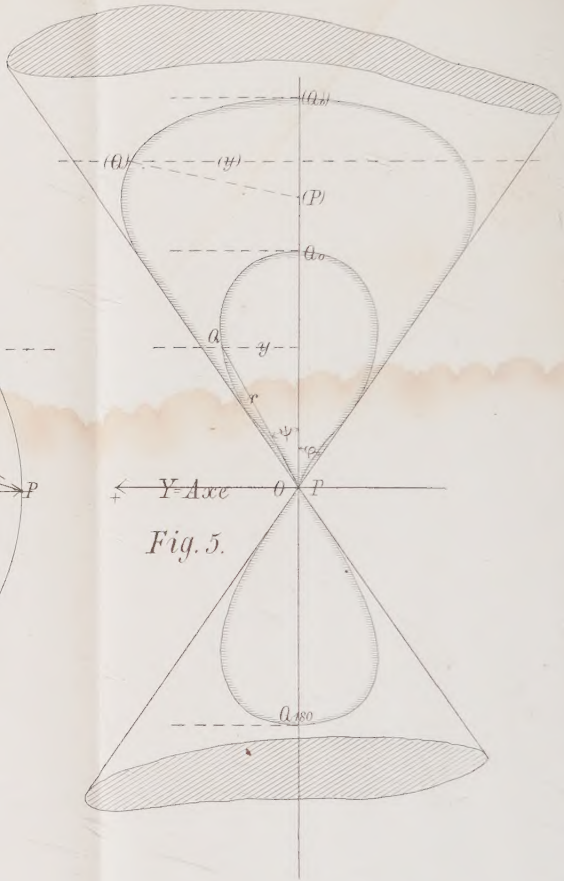
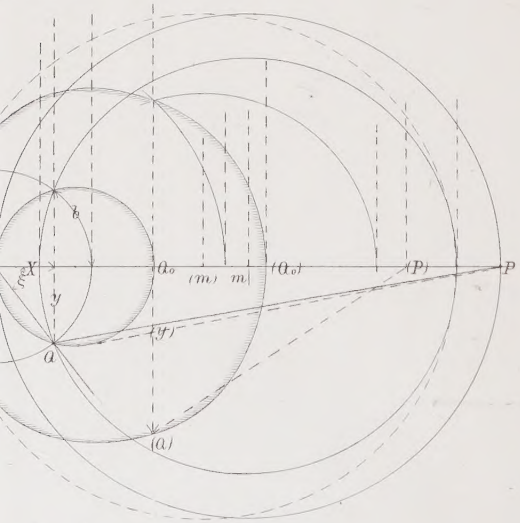


Fig. 5.



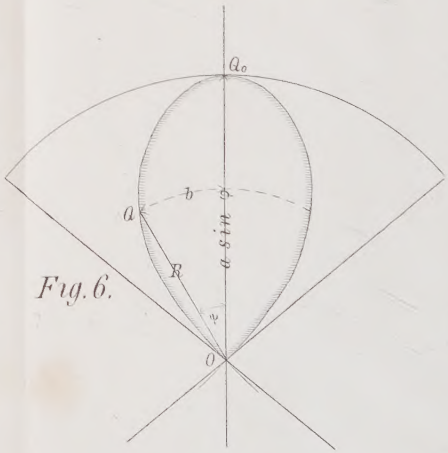


Fig. 6.

A. Stehle del.